
MEHRDIMENSIONALE INTEGRATION & KOORDINATENWECHSEL

Wir betrachten noch einmal ein Beispiel für mehrdimensionale Integration und studieren in Vorbereitung auf krummlinige Koordinaten einen Koordinatenwechsel.

[P29] *Stromfluss*
Berechnen Sie für eine Stromdichte $\vec{j} = \alpha \frac{\vec{r}}{r^3}$ den Strom $I = \int_S \mathrm{d}\vec{A} \cdot \vec{j}(\vec{r})$ nach außen durch die Fläche $S = \{\vec{r} \doteq (x,y,z) \,|\, \vec{r}\cdot\vec{m} = 1\,,\ \vec{m} \doteq (1,1,1)\,,\ x,y,z > 0\}$. Die angegebene Fläche ist ein Dreieck im ersten Oktanten mit den Ecken $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$.

(a) Skizzieren Sie die Fläche.

(b) Parametrisieren Sie die Fläche über ihre Projektion auf die xy-Ebene, also $(t,s) \equiv (x,y)$ und $\vec{r}(x,y) \doteq (x,y,h(x,y))$.

(c) Über welchen Wertebereich F laufen x und y?

(d) Bestimmen Sie den (nicht normierten) Normalenvektor $\dot{\vec{r}} \times \vec{r}\,'$. Stimmt die Orientierung?

(e) Setzen Sie alles ein in die Formel $I = \int_F \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,(\dot{\vec{r}} \times \vec{r}\,') \cdot \vec{j}(\vec{r})|_{\vec{r}(x,y)}$ und vereinfachen Sie. Lassen Sie das endgültige xy-Integral stehen.

[P30] *Koordinatenwechsel*
Zwei feste nicht kollineare und nicht normierte Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ in der Ebene definieren Parallelogramm-Koordinaten (u,v) über $\vec{r}(u,v) = \vec{a}\,u + \vec{b}\,v \doteq (a_1u{+}b_1v, a_2u{+}b_2v)$.

(a) Skizzieren Sie die Kurvenscharen $\vec{r}(u,v_0)$ und $\vec{r}(u_0,v)$ mit festem v_0 bzw. u_0.

(b) Berechnen Sie die Jacobi-Matrix $J = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$, ihre Determinante sowie die Metrik $G = J^\intercal J$.

(c) Geben Sie Linien- und Flächenelement sowie $v^2 = \dot{\vec{r}}\cdot\dot{\vec{r}}$ in den neuen Koordinaten an.

(d) Formulieren Sie für eine Bahnkurve $\mathcal{C} \ni \vec{r}(u(t),v(t))$ die Bogenlänge $s(1,2) = \int_1^2 \mathrm{d}s$ und die Wirkung $w(1,2) = \int_1^2 \mathrm{d}\vec{r}\cdot\vec{p}$ mit $\vec{p} = m\dot{\vec{r}}$.